

Série 10

Tous les exercices seront corrigés.

Vous êtes fortement encouragés à essayer de résoudre (éventuellement à plusieurs) l'exercice (*) et à rendre votre solution (éventuellement à plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (éventuellement tapé en LaTeX) en suivant le lien moodle de la semaine relative à cette série.

Rangs

Exercice 1. Déterminer le rang des matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M.N$$

en fonction de la caractéristique du corps K .

Solution 1. Le rang de M vaut 2 en toute caractéristique. Le rang de N vaut 2 si la caractéristique est 2 et 3 dans les autres caractéristiques.

Le rang de $M \cdot N = \begin{pmatrix} 14 & 20 & 14 & 12 \\ 11 & 17 & 19 & 13 \end{pmatrix}$ vaut 1 en caractéristique 2 et 2 dans les autres caractéristiques.

Exercice 2. Soient $\varphi : U \mapsto V$ et $\psi : V \mapsto W$.

1. Montrer que $\text{rg}(\psi \circ \varphi) \leq \text{rg}(\psi)$ (on pourra comparer deux images).
2. Montrer que $\text{rg}(\psi \circ \varphi) \leq \text{rg}(\varphi)$ (on pourra comparer deux noyaux).
3. Montrer que si M, N sont des matrices de dimensions convenables

$$\text{rg}(M.N) \leq \text{rg}(M), \quad \text{rg}(M.N) \leq \text{rg}(N).$$

- Montrer la deuxième inégalité ci-dessus en utilisant la première ainsi que des propriétés de la transposition.

Solution 2.

- Si $x \in \text{Im}(\psi \circ \varphi)$, alors il existe $u \in U$ tel que $x = \psi(\varphi(u)) \in \text{Im}(\psi)$. Donc $\text{Im}(\psi \circ \varphi) \subset \text{Im}(\psi)$, et donc $\text{rg}(\psi \circ \varphi) \leq \text{rg}(\psi)$.
- On a $\ker(\varphi) \subset \ker(\psi \circ \varphi)$. Donc, en utilisant le théorème du rang (pour φ et $\psi \circ \varphi$), on a $0 \leq \dim(\ker(\psi \circ \varphi)) - \dim(\ker(\varphi)) = \dim(\text{Im}(\varphi)) - \dim(\text{Im}(\psi \circ \varphi)) = \text{rg}(\varphi) - \text{rg}(\psi \circ \varphi)$.
- Suit des deux premières parties en prenant $M = \text{Mat}(\psi)$ et $N = \text{Mat}(\varphi)$ et en se souvenant que $M \cdot N$ est la matrice de $\psi \circ \varphi$.
- $\text{rg}(M \cdot N) = \text{rg}((M \cdot N)^{\text{tr}}) = \text{rg}(N^{\text{tr}} \cdot M^{\text{tr}}) \stackrel{\text{part.1}}{\leq} \text{rg}(N^{\text{tr}}) = \text{rg}(N)$.

Changements de bases

Exercice 3. On considère la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{Q})$$

que l'on voit comme matrice d'une application linéaire $\varphi : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ dans les bases canoniques.

- Que vaut $\varphi(x, y, z, t)$ pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{Q}^4$?
- Trouver une base du noyau et de l'image de φ .
- Trouver deux matrices A et B telles que $A \cdot M \cdot B = I_{3 \times 4}(r)$ avec $r = \text{rg}(\varphi)$.

Solution 3.

- Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{Q}^4$ on a

$$\varphi(x, y, z, t) = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z + 4t \\ 2x + 3y + 4z + t \\ 3x + 4y + z + 2t \end{pmatrix}.$$

- On cherche une base de $\ker(\varphi)$. On résout

$$\varphi(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z + 4t \\ 2x + 3y + 4z + t \\ 3x + 4y + z + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on obtient $\ker(\varphi) = \{(11t, -9t, t, t) : t \in \mathbb{Q}\}$. C'est évidemment une famille libre et génératrice et donc une base de $\ker(\varphi)$.

Image : On raisonne sur les colonnes de la matrice M qui forment une famille génératrice de $\text{Im}(\varphi)$ (c'est l'image de la base canonique de $\mathbb{Q}^4$). Il suffit de montrer que $\{(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 1)\}$ est une famille libre et ainsi celle ci constituera une base de l'image.

3. Il faut trouver deux bases B_3 et B_4 dans lesquelles $\text{mat}_{B_3, B_4} = Id_{3 \times 4}$. On remarque

$$\varphi(0, 1, 0, 0) = (2, 3, 4), \quad \varphi(0, 0, 1, 0) = (3, 4, 1), \quad \varphi(11, -9, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

et on pose

$$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } B_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On a donc les matrices de changement de base

$$\text{mat}_{B_3, B_3^0} = \begin{pmatrix} -13/4 & 5/2 & -1/4 \\ 5/2 & -2 & 1/2 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}, \quad \text{mat}_{B_4^0, B_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et avec $A = \text{mat}_{B_3, B_3^0}$, $B = \text{mat}_{B_4^0, B_4}$ on a $A.M.B = I_{3 \times 4}(3)$.

Exercice 4 (De l'intérêt de changer de base $(\star)$). Soit K un corps de caractéristique $\neq 3$ et

$$\begin{aligned} \varphi : K^2 &\mapsto K^2 \\ (x, y) &\mapsto (x/3 + 4y/3, -x/3 + 5y/3) \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B} := \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\} = \{(2, 1), (1, 2)\}$

1. Calculer la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.
2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de K^2 et exprimer $(1, 0)$ et $(0, 1)$ en fonction de $\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{f}_2$ et calculer la matrice N de φ dans cette base de deux manières :
 - Par la formule de changement de base pour les matrices.
 - Directement en exprimant $\varphi(\mathbf{f}_i)$ $i = 1, 2$ en combinaison linéaire de $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$.
 - Montrer que si on avait $\text{car}(K) = 3$ alors $\mathcal{B}$ ne serait pas une base.
3. Calculer par récurrence N^n pour tout entier $n \geq 0$ (on pose $N^0 = Id_2$).
4. Montrer par récurrence que si $C \in GL_2(K)$ et $U \in M_2(K)$ alors pour tout $n \geq 0$

$$(C.U.C^{-1})^n = C.U^n.C^{-1}.$$

5. En deduire une expression (relativement) elementaire de la puissance M^n pour tout $n \geq 0$.

Solution 4.

1. We will denote the elements of the canonical basis $\mathcal{B}^0$ by $e_1 = (1, 0)$ and $e_2 = (0, 1)$. Observe that

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right), \\ \varphi(e_2) &= \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)\end{aligned}$$

Therefore we have

$$Mat_{\mathcal{B}^0, \mathcal{B}^0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

2. Observe that if $\text{car}(K) \neq 3$, f_1 and f_2 are linearly independent (libre) : By definition we have

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = \lambda_2 \\ 2\lambda_2 = -\lambda_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = \lambda_2 \\ 3\lambda_2 = -\lambda_0 \end{cases}$$

If $\text{car}(K) \neq 3$ then $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ and the vectors are linearly independent. If $\text{car}(K) = 3$ note that the system has solutions for non-zero λ_2 and therefore the vectors are not linearly independent.

We will now compute the matrix of φ in the basis of $\mathcal{B}$ denoted by $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ using the formula of changing basis, i.e.

$$N = Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = Id_{\mathcal{B}\mathcal{B}^0} Mat_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}^0} Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}},$$

where by Id_{AB} we denote the matrix of chanign basis from A to B . First we compute $Id_{\mathcal{B}\mathcal{B}^0}$. Observe that

$$(e_1) = \frac{2}{3}f_1 - \frac{1}{3}f_2,$$

$$(e_2) = \frac{2}{3}f_2 - \frac{1}{3}f_1.$$

Therefore

$$Id_{\mathcal{B}\mathcal{B}^0} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Then we compute $Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}}$. Observe that $f_1 = 2e_1 + e_2$ and $f_2 = e_1 + 2e_2$. Then

$$Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Therefore we have

$$Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We now compute $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ directly. In order to do this one has to compute

$$\varphi(f_1) = (2, 1) = 1f_1 + 0f_2,$$

$$\varphi(f_2) = (3, 3) = f_1 + f_2.$$

These coefficients form the columns of the matrix $Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ which is therefore given by

$$N = Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

This confirms our computation using the formula of changing basis.

3. Observe that by simple computations one can see that taking the n -th power of the matrix N gives us

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Observe that since $C^{-1}C = Id$ we have

$$(C.U.C^{-1})^n = C.U.C^{-1} \dots C.U.C^{-1} = C.U.U \dots U.U.C^{-1} = C.U^n.C^{-1}$$

5. We know from the theory of the course that $Id_{\mathcal{B},\mathcal{B}^0}$ is invertible and

$$Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}} = Id_{\mathcal{B},\mathcal{B}^0}^{-1}.$$

Therefore for the formula of changing basis

$$M = Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}} Mat_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}^0} Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}}^{-1}$$

$$M = Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}} N Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}}^{-1}.$$

So together with the formula from Point 4 we have $M^n = Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}} N^n Id_{\mathcal{B}^0\mathcal{B}}^{-1}$

Produits de matrices

Exercice 5. Soit $M = (m_{ij}) \in M_{d'' \times d'}(K)$ et $N = (n_{kl}) \in M_{d' \times d}(K)$. Montrer par un calcul littéral que

$${}^t(M.N) = {}^tN {}^tM.$$

Solution 5.

On a

$$({}^t(M.N))_{ij} = (MN)_{ji} = \sum_{k=1}^{d'} M_{jk} N_{ki} = \sum_{k=1}^{d'} ({}^tN)_{ik} ({}^tM)_{kj} = ({}^tN {}^tM)_{ij}.$$

Ainsi les composantes sont égales et on conclut.

Exercice 6. Soit K un corps et pour $d \geq 2$

$$\mathcal{B}_{22}^0 := \{E_{ij}, i, j \leq 2\} \subset M_2(K)$$

l'ensemble des matrices élémentaires de taille 2 (on rappelle que c'est une base de $M_2(K)$: on l'appelle la base canonique de $M_2(K)$).

On définit les SEVs suivants de $M_2(K)$:

$$D_2(K) = \text{Vect}(E_{11}, E_{22}) \text{ et } T_2(K) = \text{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{22}).$$

1. Quelles sont les dimensions de ces SEVs ? Donner la forme générale d'une matrice dans ces deux SEVs ; comment appelle-t-on ces ensembles de matrices ?
2. Montrer que ces SEVs sont stables par produits et sont en fait des sous-algèbres de $M_2(K)$.
3. Lesquelles de ces sous-algèbres sont commutatives ?

Solution 6.

1. $D_2(K) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in K \right\}$ de dimension 2, le sous-espace des matrices diagonales. $T_2(K) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in K \right\}$ de dimension 3, le sous-espace des matrices triangulaires supérieures.

2.

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 & 0 \\ 0 & y_1 y_2 \end{pmatrix} \in D_2(K).$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 & x_1 y_2 + y_1 z_2 \\ 0 & z_1 z_2 \end{pmatrix} \in T_2(K).$$

Et

$$\text{Id}_2 \in D_2(K) \subset T_2(K).$$

3. $D_2(K)$ est commutatif. $T_2(K)$ ne l'est pas, par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Soit K un corps. On considère la matrice 3×3

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(K)$$

1. Calculer $M^2 = M.M$, $M^3 = M.M.M$, et trouver $a_0, a_1, a_2 \in K$ tels que

$$\mathbf{0}_3 = M^3 + a_2.M^2 + a_1.M + a_0.\text{Id}_3.$$

2. Montrer (par récurrence) que pour tout $k \geq 3$, M^k est combinaison linéaire de $\{M^2, M, \text{Id}_3\}$.

3. On note

$$\begin{aligned} K[M] &= \text{Vect}(\text{Id}_3, M, M^2, \dots, M^k, \dots) \\ &= \{a_0.\text{Id}_3 + a_1.M + \dots + a_d.M^d, d \geq 1, a_0, a_1, \dots, a_d \in K\} \subset M_3(K) \end{aligned}$$

l'espace vectoriel des matrices engendré par toutes les puissances de M (on pose $M^0 = \text{Id}_3$).

(a) Montrer que

$$K[M] = \text{Vect}(\text{Id}_3, M, M^2).$$

Quelle est la dimension de $K[M]$?

(b) Montrer que $K[M]$ est stable par produit et que c'est un sous-anneau de $M_3(K)$.

Solution 7.

1. $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que $M^3 + M^2 + M + \text{Id}_3 = \mathbf{0}_3$. La matrice M s'appelle la *matrice compagne* du polynôme $X^3 + X^2 + X + 1$.
2. Si $k = 3$, on a $M^3 = -M^2 - M - \text{Id}_3$. Supposons $k \geq 4$ et le résultat vrai pour $k - 1$. Alors $M^k = M \cdot M^{k-1} \stackrel{HR}{=} M \cdot (a_2 M^2 + a_1 M + a_0) = a_2 M^3 + a_1 M^2 + a_0 M \stackrel{\text{cas } k=3}{=} -a_2 M^2 + (-a_2 + a_0)M - a_2 \text{Id}_3$.
3. (a) Par la partie 2, $\{M^k \mid k \geq 0\} \subset \text{Vect}(\text{Id}_3, M, M^2)$. Donc $K[M] \subset \text{Vect}(\text{Id}_3, M, M^2)$, car la famille $\{M^k \mid k \geq 0\}$ engendre $K[M]$. L'autre inclusion est évidente. La dimension de $K[M]$ est de 3 comme espace vectoriel sur K .
 (b) Tout d'abord, $\text{Id}_3 \in K[M]$. De plus si $\sum_{i=0}^p a_i M^i$ et $\sum_{j=0}^q b_j M^j \in K[M]$, alors

$$\left(\sum_{i=0}^p a_i M^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^q b_j M^j \right) = \sum_{k=0}^{p+q} \sum_{m=0}^k a_m b_{m-k} M^k \in K[M].$$

Exercice 8. Soit $A = (a_{ij})_{i,j \leq 2} \in M_2(K)$ une matrice et $[A.]$, l'application de multiplication à gauche par A :

$$[A.] : M \in M_2(K) \mapsto A.M \in M_2(K).$$

1. Montrer que $[A.]$ est linéaire.
2. Montrer que $[A.]$ est inversible ssi A est inversible.
3. Calculer la matrice de $[A.]$ dans la base canonique de $M_2(K)$ (formée des matrices élémentaires dans l'ordre ci-dessous)

$$\mathcal{B}_{22}^0 = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}.$$

4. Montrer que

$$A^2 = \mathbf{0}_2 \text{ ssi } \text{Im}([A.]) \subset \ker([A.])$$

(pour une direction remarquer que $A \in \text{Im}([A.])$).

5. On considère l'application

$$A \in M_2(K) \mapsto [A.] \in \text{End}(M_2(K)).$$

Montrer qu'elle est linéaire et injective.

Solution 8. From now on the matrix multiplication $A.B$ will be just denoted by AB .

1. To prove that the application $[A.]$ is linear it is sufficient to show that

$$[A.](N_1 + \lambda N_2) = [A.](N_1) + \lambda [A.](N_2)$$

for any $\lambda \in K$ and $N_1, N_2 \in M_2(K)$. This follows by the properties of multiplication of matrices.

3. Consider the canonical basis $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ and $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Then we have

$$AE_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = a_{11}E_{11} + a_{21}E_{21}.$$

Similarly we can compute

$$AE_{12} = a_{11}E_{12} + a_{21}E_{22},$$

$$AE_{21} = a_{12}E_{11} + a_{22}E_{21},$$

$$AE_{22} = a_{12}E_{12} + a_{22}E_{22}$$

Therefore we can write $[A.]$ in matrix form with respect to the canonical basis as follows

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

2. This is equivalent to proving that

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(\mathcal{A}) \neq 0.$$

Observe that

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{A}) &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix} + a_{12} \det \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0 \\ &\Downarrow \\ a_{11}a_{22} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - a_{12}a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &\Downarrow \\ a_{11}a_{22} \det(A) - a_{12}a_{21} \det(A) &\neq 0 \\ &\Downarrow \\ \det(A)^2 &\neq 0 \\ &\Downarrow \\ \det(A) &\neq 0. \end{aligned}$$

4. We would like to prove that $A^2 = 0 \Leftrightarrow \text{Im}[A.] \subset \ker[A.]$. We will use the following notation. A matrix $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ will be denoted in vector form as $m = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \end{pmatrix}$ (and we say M is the matrix form of m).

We will first prove this implication ($\Rightarrow$). Suppose $A^2 = 0$ and let $v \in \text{Im}[A.]$. Then there exists w such that $v = [A.]w$. This implies that in matrix form $V = AW$. Since $A^2 = 0$ we have $AV = AA w = 0$. This can be written as $[A.][A.]w = 0$. Therefore we can conclude $v = [A.]w \in \ker[A.]$. For the other implication : Suppose $\text{Im}[A.] \subset \ker[A.]$. We know that a , the vector form of the matrix A is in $\text{Im}[A.]$ (since $[A.]Id = a$). Therefore $[A.]A = A^2 = 0$.

5. Denote by Φ the map described in point 5. It is linear since $\Phi(A + \lambda B) = [A.] + \lambda[B.]$ for every $A, B \in M_2(K)$ and $\lambda \in K$. We let the reader prove the details of this. This map it is injective since

$$\Phi(A) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$